УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ *Образац 3*
ФАКУЛТЕТ: ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЈЕШТАЈ
о оцјени урађене докторске дисертације

1. ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Орган који је именовао комисију: Сенат Универзитета у Бањој Луци, на основу приједлога одлуке Наставно-научног вијећа Природно-математичког факултета (Број: 19/3.2464/23, дана 11.10.2023.)

Датум именовања комисије: 26.10.2023.

Број одлуке: 02/04-3.2350-67/23

Чланови комисије:

	Презиме и име	Звање	Научно поље и ужа научна област
1.	Академик Зоран Митровић	редовни професор	Математичка анализа и примјене
	Установа у којој је запослен-а		**Функција у комисији**
	Електротехнички факултет, Универзитет у Бањој Луци		предсједник
2.	Академик Миодраг Матељевић	редовни професор	Математичка анализа и примјене
	Математички факултет, Универзитет у Београду		члан
3.	Др Владимир Јовановић	ванредни професор	Математичка анализа и примјене
	Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци		члан
4.	Др Мирослав Пранић	редовни професор	Математичка анализа и примјене
	Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци		члан

2. ПОДАЦИ О СТУДЕНТУ

Име, име једног родитеља, презиме: Јелена (Бранко) Гајић

Датум рођења: 16.01.1976.

Мјесто и држава рођења: Бања Лука, Р.С, БИХ

2.1. Студије првог циклуса или основне студије или интегрисане студије

Година уписа:	1994	Година завршетка:	2001	Просјечна оцјена током студија:	8.84

Универзитет: Универзитет у Бањој Луци

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Математика

Стечено звање: Дипломирани математичар и информатичар

2.2. Студије другог циклуса или магистарске студије

Година уписа:	2007	Година завршетка:	2010	Просјечна оцјена током студија:	9.25

Универзитет: Универзитет у Новом Саду

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Департмент за математику и информатику

Назив завршног рада другог циклуса или магистарске тезе, датум одбране: Прилози теорији оператора –Банахове алгебре и Шатенове класе, 15.01.2010.

Ужа научна област завршног рада другог циклуса или магистарске тезе: математичка анализа и примјене

Стечено звање: мастер математичар

2.3. Студије трећег циклуса

Година уписа:	2018	Број ECTS остварених до сада:	227	Просјечна оцјена током студија:	10.00

Факултет/и: Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци

Студијски програм: Математика

2.4. Приказ научних и стручних радова студента

РБ	Подаци о референци	Категорија
1.	M.Arsenović and J.Gajić. „Functions simultaneously harmonic and *M*-harmonic in the unit polydisc.“ Filomat (accepted 22.09.2023).	SCI листа, IF=0.8

У овом раду је дата потпуна карактеризација функција које су истовремено хармонијске и *M*-хармонијске на јединичном полидиску. То су управо функције које су хармонијске по свакој промјењивој, или еквивалентно то су функције које се могу представити као линеарна комбинација функција које су по свакој од променљивих холоморфне или

конјуговано холоморфне. Осим тога изучавана је и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n. Користећи наше резултате добијамо карактеризацију функција *u*, дефинисаних на јединичном полидиску, тако да су и *u* и u^s (цијели број $s \geq 2$) истовремено хармонијске и *M*-хармонијске. Наши резултати су у контрасту са резултатима познатим за такве функције у јединичној лопти у C^n.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
2.	J. Gajić, *A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in C^n*, Analysis Mathematica, 48(4) (2022), pp. 1047–1054 DOI: 10.1007/s10476-022-0166-2	SCI листа IF: 0.7	
У овом раду је доказана Schwarz–Pick-ова лема за ограничене и позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n. Такође, дате су и процјене растојања у терминима Kobayashi-јеве метрике као и процјене градијента и М-инваријантног реалног градијента за такве функције. Користећи наше резултате за плурихармонијске функције доказан је Harnack-ов тип резултата. Процјене растојања важе у општијим доменима, али без тачних константи. У раду је дат директан доказ за позитивне и ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Све процјене, које су добијене, су најбоље процјене и не могу се побољшати.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
3.	M. Arsenović, J. Gajić, *A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in C^n*, Bulletin of International Mathematical Virtual Institute, **11** (2021), 249–253.		
Дато је уопштење Schwarz–Pick-ове леме за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n. За изучавање процјене растојања таквих функција коришћена је Bergman-ова метрика. Поред тога дате су процјене градијента и *M*-инваријантног реалног градијента за такве функције.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
4.	J. Гајић, Д. А. Романо, М. Мрђа, *Једна анализа студентских менталних структура при рјешавању задатка о граничној вриједности функције*, МАТ-КОЛ, Бања Лука, **XXI** (4) (2015), 221-235.		
Овај извјештај садржи анализу неприхватљивих и промашених одговора студената Машинског факултета у Бањој Луци на једно питање о граничној вриједности функције. У процедури израчунавања граничне вриједности у понуђеном задатку осим примјене тзв. 'логаритамског поступка' требало је примјенити и Лопиталов теорем. На основу прикупљених показатеља и деривираних закључака, ослањајући се на APOS теорију и SOLO таксономију, процјењујемо да је концепт граничне вриједности и процеси са тим			

концептом (али не и процедурално кориштења овог концепта) за већину тестиране студентске популације прихватљив уз знатне потешкоће. Понуђена је једна реконструкција студентских менталних слика које се индукују у њиховим умовима при настојањима да понуде прихватљиве одговоре на понуђени задатак уз кориштење категоријалних појмова RBC+C теорије апстракције. Чини се да се може формирати хипотеза (чију би оправданост, наравно, требало студиозно испитати) да многи студенти овог факултета немају изграђена неопходно потребна концептуална и процесна знања у њиховим когнитивним равнима о граничним процесима низова и функција због недовољно квалитетно консолидованих знања о својствима објеката поља реалних бројева.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**<u>НЕ</u>**
РБ		Категорија	
5.	S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, <u>J. Gajić</u>, *Knowledge of food quality and additives and its impact on food preference*, Acta Scientiarum Polonorum Technologia Alimentaria, **12**(2) 2013, 215-222.	Scopus	
У овом раду је примјеном статистичких метода испитивано како познавање квалитета хране и улога адитива у исхрани утичу на опредјељење извјесне групе потрошача приликом избора намирница.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**<u>НЕ</u>**
РБ		Категорија	
6.	S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, <u>J. Gajić</u> , *The Importance of Consumers' Knowledge About Food Quality, Labeling and Safety in Food Choice*, Journal of Food Research, **2** (5)(2013), 57-65.		
Уз помоћ χ^2-теста је испитивано како извјесне групе млађих потрошача реагују на информације које се тичу квалитета хране, сигурности прехрамбених производа и декларација које се на њима налазе.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**<u>НЕ</u>**
РБ		Категорија	
7.	<u>Ј. Гајић</u>, С. Косић-Јеремић, *Један задатак са комплексним бројевима*, Настава математике, Београд, ЛИВ **2-3** (2009), 24-26.		
У овом раду је на више различитих начина рјешен један задатак са комплексним бројевима.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**<u>НЕ</u>**

3. УВОДНИ ДИО ОЦЈЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

1. Наслов докторске дисертације: Простори плурихармонијских, *M*-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску
2. Научно поље је математика, а ужа научна област је математичка анализа и примјене.

3. Датум прихватања теме докторске дисертације и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета: Тема докторске дисертације прихваћена је Одлуком број 02/04-3.121-54/23 коју је донио Сенат Универзитета у Бањој Луци 26.01.2023. године.
4. Сагласност на Извјештај комисије за оцјену подобности теме, кандидата и испуњености услова за менторство за израду докторске дисертације на Природно-математичком факултету кандидата Јелене Гајић, добијена је од Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета Одлуком број 19/3.4099/22 од 14.12.2022. године, а од стране Сената Универзитета у Бањој Луци Одлуком број 02/04-3.121-54/23 од 26.01.2023. године.
5. Садржај докторске дисертације са страничењем:

Докторска дисертација је написана на српском језику, ћириличним писаним фонтом Times New Roman на 130 страна А4 формата и садржи седам поглавља: Увод, Основни појмови, тврђења и ознаке, Шварц Пикова лема за плурихармонијске функције, Хармонијске и *М*-хармонијске функције, H^p простори појединачно (α,β)-хармонијских функција у јединичном полидиску, Закључак, Литература (85 референци). Осим тога седам страна садржи: информације о ментору, дисертацији и резиме на српском језику,
информације о ментору, дисертацији и резиме преведене на енглески језик, посвету и

садржај.

У уводном поглављу наведени су проблеми и предмети истраживања са хипотезама, циљ истраживаља, кратак преглед досадашњих истраживања и кратак садржај слиједећих поглавља.

У другом поглављу дефинисани су основни појмови и уведене одговарајуће ознаке. Ради потпуности дате су и дефиниције холоморфних, хармонијских, плурихармонијских и појединачно хармонијских функција и наведена су њихова основна својства и тврђења. При томе, наведена су само она тврђења која се непосредно користе у наставку дисертације. Такође је наведена литература у којој се може наћи више информација о појмовима уведеним у овом поглављу.
Треће поглавље посвећено је Шварцовој и Шварц-Пиковој леми. Уведени су Пуанкареова (хиперболичка) метрика, Пуанкареово (хиперболичко) растојање уз доказе одговарајућих тврђења. Одређено је Пуанкареово растојање тачака из диска, десне полуравни и вертикалног појаса. Дато је уопштење Шварц-Пикове леме са јединичног диска у комплексној равни на случај јединичног полидиска. Потом је уведено Кобајашијево растојање између тачака на D^n и Бергманово растојање између тачака на B^n, као и контрактивна својства Кобајашијеве и Бергманове метрике на D^n и B^n респективно. Дата су уопштења Шварцове леме и неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n. Такође, дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и *М*-инваријантног реалног градијента за такве функције. Користећи те резултате за плурихармонијске функције, доказан је Харнаков тип резултата. Све процјене, које су добијене, су најбоље процјене и не могу се побољшати.

У четвртом поглављу дефинисане се *М*-хармонијске функције на D^n и B^n уз доказе одговарајућих тврђења. Приказано је да је функција, која је дефинисана на јединичној лопти B^n, плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и *М*-хармонијска. У наставку су приказани резултати везани су за изучавања веза између класа хармонијских и *М*-хармонијских функција на отвореном јединичном полидиску. Такође је изучавана и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n.

Пето поглавље посвећено је H^p теорији. Приказана је H^p теорија за појединачно хармонијске функције на отвореном јединичном полидиску и дати су неки појмови и тврђења за вишеструке Фуријеове редове и диференцирање *n*-интеграла. Затим је приказан развој у ред (α, β)-хармонијских функција у D. Након увођења класа функција на D^n развијена је H^p -теорија за случај појединачно (α, β)-хармонијских функција на D^n : интегралне репрезентације мјерама и L^p функцијама на истакнутој граници T^n, конвергенција у норми и слаба* конвергенција на T^n. Добијен је слаби (1,1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију. Показано је да функције на D^k, добијене фиксирањем *n-k* промјењљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од *k* промјењљивих. Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α,β)-хармонијске функције у диску и за појединачно хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

У закључку дисертације је на суставан, концизан и језгровит начин изложен дио остварених резултата. Поред тога формулисани су и нови отворени проблеми. Дио трећег, четвртог и већи дио петог поглавља докторске дисертације садржи оригиналне резултате.

4. УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

У истраживању се разматрају процјене растојања, обичног и инваријантног градијента плурихармонијских функција дефинисаних на отвореном јединичном полидиску и на отвореној јединичној лопти у C^n. Даље, изучавано је која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. Осим тога уведене су класе функција на полидиску и развијена је H^p теорија из тих класа.

Шварцова лема за холоморфне функције дефинисане на јединичном диску D у комплексној равни C је један од најутицајнијих резултата у комплексној анализи и има велики утицај на развој неколико истраживачких области као нпр геометријска теорија функција, диференцијална геометрија и теорија квазиконформних пресликавања. Више од сто година Шварцова лема има уопштења у разним правцима и постоји обимна литература [3, 13, 14, 16, 35, 36, 38, 43, 47, 57, 60, 69, 81]. Свака реално-вриједносна хармонијска функција на D јесте реални дио неке холоморфне функције и при томе модул градијента те хармонијске функције једнак је модулу извода одговарајуће холоморфне функције. Такође, ако вриједности хармонијске функције припадају $(-1, 1)$, односно интервалу $(0, \infty)$, онда вриједности одговарајуће холоморфне функције припадају вертикалном појасу $S = \{z \in C : -1 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, односно десној полуравни $K = \{z \in C : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Метод појаса и полуравни развијен је у [57] како би се добиле неједнакости Шварц-Пиковог типа за реално-вриједносне хармонијске функције и хармонијска квазирегуларна пресликавања из D у S [57, 59]. Резултати Чена [13], Калаја и Вуоринена [36] и Мелентијевића [60] могу се добити методом појаса. Процјене извода и својствено томе процјене растојања за различите класе функција (првенствено холоморфних функција на области у C^n) су теме од интереса у области геометријске теорије функција. Аутор рада [38] даје процјене растојања за плурихармонијске функције из произвољне комплексне многострукости у одговарајући интервал у R, али без тачних константи. Чен и Расила [14] су дали Шварц-Пикове процјене парцијалних извода вишег реда ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Процјена обичног градијента ограничене плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти B^n из C^n дата је у [81], а процјена *M*-инваријантног реалног градијента такве функције дата је у [60].

Једна од тема теорије функција је изучавање која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. На примјер, аналитичност и p-интеграбилност дају припадност Бергмановом простору. Изучавање веза између класа аналитичких, хармонијских, плурихармонијских функција, као и *M*-хармонијских, је вршено у радовима [2,71]. Нагласак је био на случају јединичне лопте у C^n. Рудин [71] је доказао да је функција дефинисана на јединичној лопти у C^n плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска на B^n. Мултипликативна структура таквих простора у случају лопте је разматрана у [2,40].

Почетак теорије Хардијевих простора повезује се са радовима Хардија [27] и Риса [68] из 1915. и 1923. године, респективно. Теорија Хардијевих простора је веома важна грана савремене комплексне и хармонијске анализе. Комбинује технике из теорије холоморфних функција, функционалне анализе, теорије мјере и интеграције и има примјену у хармонијској анализи, Фуријеовој анализи, теорији парцијалних диференцијалних једначина и другим областима математике. H^p простори су најинтензивније проучавани у случају јединичног диска [17, 29, 45, 84]. Вишедимензиона уопштења у класичним доменима у C^n захтјевају технику другачију од технике развијене за диск у комплесној равни C. H^p теорија за појединачно хармонијске фунције развијена је у [24], [69], [76] и [85], за *M*-хармонијске развијена је у [20],[46],[77], [78], а за (α, β)-хармонијске развијена је у [1], [22].

Циљеви истраживања су:

1. Први циљ истраживања је добити процјене извода и својствено томе процјене растојања у случају плурихармонијских функција у D^n. Такве процјене су добијене, и оне се не могу даље побољшати (тачне процјене су добијене).
2. Други циљ истраживања је размотрити хармоничност и *M*-хармоничност у D^n. Добијени су упечатљиви резултати који су у контрасту са ситуацијом у B^n.
3. Трећи циљ истраживања је да се развије H^p-теорија за нову класу појединачно (α,β)-хармонијских функција у D^n.

[1] P. Ahern, J. Bruna, and C. Cascante. "H^p -theory for generalized M-harmonic functions in the unit ball." In: Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), pp. 103–135.

[2] P. Ahern and W. Rudin. "M-harmonic products." In: Indag. Mathem., N.S. 2(2) (1991), pp. 141–147.

[3] L. V. Ahlfors. Conformal Invariants. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[4] M. Arsenović and J. Gajić. "A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in Cn ." In: Bull. Int. Math. Virtual Inst. 11(2) (2021), pp. 249–253.

[5] M. Arsenović and J. Gajić. "Functions simultaneously harmonic and M-harmonic in the unit polydisc." In: Filomat (2023).

[6] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. Harmonic Function Theory. Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] H. Bateman. Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[8] H. P. Boas. "Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma." In: Amer. Math. Monthly Vol. 117 No. 9 (November 2010), pp. 770–785.

[9] A. M. Bruckner. "Differentiation of Integrals." In: The American Mathematical Monthly 78(9) (1971), pp. i–51.

[10] A.P. Calderón and A. Zygmund. "Note on the boundary values of functions of several complex variables." In: Contributions to Fourier Analysis. (AM-25). Princeton: Princeton University Press, 1950, pp. 145–165.

[11] C. Carathéodory. "Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten." In: Mathematische Annalen 72 (1) (1912), pp. 107–144.

[12] H. Cartan. "Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique." In: J. de Math. Pures et Appl. Vol. 96 (1931), pp. 1–114.

[13] H. H. Chen. "The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings." In: Sci. China Math. Vol. 54 No. 6 (June 2011), pp. 1101–1118.

[14] S. Chen and A. Rasila. "Schwarz–Pick type estimates of pluriharmonic mappings in the unit polydisk." In: Illinois J. Math. 58(4) (2014), pp. 1015–1024.

[15] E. M. Chirka. "Variation of Hartogs' theorems." In: Proc. Steklov. Inst. Math. 253(2)

(2006), pp. 212–220.

[16] S. Dineen. The Schwarz Lemma. Clarendon Press Oxford, 1989.

[17] P. Duren. Theory of H^p spaces. Academic Press Inc., 1970.

[18] P. Fatou. "Séries trigonométriques et séries de Taylor." In: Acta Math. 30 (1906), pp. 335–400.

[19] F. Forelli. "Pluriharmonicity in terms of harmonic slices." In: Math. Scand. 41(2) (1977), pp. 58–364.

[20] H. Furstenberg. "A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups." In: Annals of Mathematics 77.2 (1963), pp. 335–386.

[21] J. Gajić. "A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in C^n ." In: Analysis Mathematica 48(4) (2022), pp. 1047–1054.

[22] D. Geller. "Some results in H^p theory for the Heisenberg group." In: Duke Math. J. 47 (1980), pp. 365–390.

[23] C. R. Graham. "The Dirichlet problem for the Bergman Laplacian. I." In: Communications in Partial Differential Equations 8.5 (1983), pp. 433–476.

[24] R. F. Gundy and E. M. Stein. "H^p theory for the poly-disc (biharmonic functions/area integral/Brownian motion)." In: Proc. Natl. Acad. Sci. 76.3 (1979), pp. 1026–1029.

[25] R.C. Gunning and H. Rossi. Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, series in modern analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[26] M. de Guzman. Differentiation of Integrals in R^n . Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, 1975.

[27] G. H. Hardy. "The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function." In: Proceedings of the London Mathematical Society 14(1) (1915), pp. 269–277.

[28] F. Hartogs. "Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortschreiten." In: Math Ann 62 (1906), pp. 1–88.

[29] K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice-Hall, Inc., 1962.

[30] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis. Vol. 256. Grundlehren Math. Wiss. Springer, Cham, 1983.

[31] M. Jarnicki and P. Pflug. Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis - 2nd extended edition. de Gruyter Expositions in Mathematics 9, Walter de Gruyter, 2013.

[32] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, and A. Zygmund. "Note on the Differentiability of Multiple Integrals." In: Fundamenta Mathematicae 25 (1935), pp. 217–234.

[33] F. John. "The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients." In: Commun. Pure Appl. Math. 3(3) (1950), pp. 273–304.

[34] G. Julia. "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles." In: J. Math. Pures Appl. (8) 1 (1918), pp. 47–245.

[35] D. Kalaj. "Schwarz lemma for holomorphic mappings in the unit ball." In: Glasgow Mathematical Journal 60.1 (2018), pp. 219–224.

[36] D. Kalaj and M. Vuorinen. "On harmonic functions and the Schwarz lemma." In: Proc. Amer. Math. Soc. 140, no. 1 (2012), pp. 161–165.

[37] Y. Katznelson. An Introduction to Harmonic Analysis. 3rd ed. Cambridge Mathematical

Library. Cambridge University Press, 2004.

[38] A. Khalfallah. "Old and New Invariant Pseudo-Distances Defined by Pluriharmonic Functions." In: Complex Anal. Oper. Theory 9(1) (2015), pp. 113–119.

[39] A. Khalfallah, M. Mateljević, and M. Mhamdi. "Some properties of mappings admitting general Poisson representations." In: Mediterr. J. Math. (17.8.2021).

[40] H. O. Kim. "M-harmonic functions with M-harmonic square." In: Bull. Austral. Math. Soc. 537 (1996), pp. 123–129.

[41] K.T. Kim, E. A. Poletsky, and G. Schmalz. "Functions holomorphic along holomorphic vector fields." In: J. Geom. Anal. 19(3) (2009), pp. 655–666.

[42] M. Klintborg and A. Olofsson. "A series expansion for generalized harmonic function." In: Analysis and Mathematical Physics (11.6.2021).

[43] G Knese. "A Schwarz lemma on the polydisk." In: Proc. Am. Math. Soc. 135.9 (2007), pp. 2759–2768.

[44] S Kobayashi. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

[45] P. Koosis. Introduction to H^p spaces- second edition. Cambridge University Press, 1998.

[46] A. Korányi. "Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space." In: Transactions of the American Mathematical Society 135 (1969), pp. 507–516.

[47] S. Krantz. Function Theory of Several Complex Variables 2nd ed. American Mathematical Society, 2001.

[48] S. G. Krantz. Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric. Springer, 2013.

[49] S. G. Krantz. Geometric Function Theory. Birkhäuser, 2006.

[50] S. G. Krantz. "On a theorem of F. Forelli and a result of Hartogs." In: Complex Variables and Elliptic Equations 63.4 (2018), pp. 591–597.

[51] H. Lebesgue. "Sur l'intégration des fonctions discontinues." In: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 3e série, 27 (1910), pp. 361–450.

[52] M. Li and X. Chen. "Schwarz Lemma for Solutions of the α-harmonic Equation." In: Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 45 (2022), pp. 2691–2713.

[53] P. Li, X. Wang, and Q. Xiao. "Several properties of α-harmonic functions in the unit disk." In: Monatshefte für Mathematik 184 (2017), pp. 627–640.

[54] S.-Y. Li and J. Luo. "Forelli type theorem in harmonic map forms." In: Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), pp. 5361–5371.

[55] SY. Li and E. Simon. "Boundary Behavior of Harmonic Functions in Metrics of Bergman Type on the Polydisc." In: American Journal of Mathematics 124(5) (2002), pp. 1045–1057.

[56] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. "On the summability of double Fourier series." In: Fundamenta Mathematicae 32 (1939), pp. 112–132.

[57] M. Mateljević. "Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions." In: J. Math. Anal. Appl. 464 (2018), pp. 78–100.

[58] M. Mateljević. Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps. Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[59] M. Mateljević and M. Svetlik. "Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings." In: Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), pp. 150– 168.

[60] P. Melentijević. "Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack

inequalities." In: Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43 (2018), pp. 391–399.

[61] C. N. Moore. "On the summability of double Fourier series of discontinuous functions." In: Mathematische Annalen 74 (1913), pp. 555–578.

[62] O. M. Nikodým. "Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles." In: Fundamenta Mathematicae 10 (1927), pp. 116–168.

[63] A. Olofsson. "Differential operators for a scale of Poisson type kernels in the unit disc." In: J. Anal. Math. 123 (2014), pp. 227–249.

[64] A. Olofsson and J. Wittsten. "Poisson integrals for standard weighted Laplacians in the unit disc." In: J. Math. Soc. Jpn. 65.2 (2013), pp. 447–486.

[65] M. Pavlović. "Inequalities for the gradient of eigenfunctions of the invariant Laplacian in the unit ball." In: Indag. Math. 2(1) (1991), pp. 89–98.

[66] L. Peijin, A. Rasila, and Z-G. Wang. "On properties of solutions to the α-harmonic equation." In: Complex Variables and Elliptic Equations 65.12 (2020), pp. 1981–1997.

[67] H. Poincaré. "Sur les groupes des équations linéaires." In: Acta Math. 4 (1884), pp. 201–311.

[68] F. Riesz. "Über die Randwerte einer analytischen Funktion." In: Mathematische Zeitschrift 18 (1923), pp. 87–95.

[69] W. Rudin. Function Theory in Polydiscs. W.A. Benjamin, New-York, 1969.

[70] W. Rudin. Function theory in the unit ball of C^n. Springer-Verlag, 1980.

[71] W. Rudin. "Pluriharmonic functions in balls." In: Proc. Amer. Math. Soc. 62(1) (1977), pp. 44–46.

[72] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Singapure, 1987.

[73] S. Saks. "Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral." In: Fundamenta Mathematicae 22 (1934), pp. 257–261.

[74] H. A. Schwarz. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1890.

[75] B. V. Shabat. Introduction to Complex Analysis Part II Function of several variables. American Mathematical Society, 1992.

[76] K. R. Shrestha. "Hardy Spaces on the Polydisk." In: European Journal of Pure and Applied Mathematics 9.3 (2016), pp. 292–304.

[77] P. Sjögren. "Fatou theorems and maximal functions for eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator in a bidisk." In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 345 (1983), pp. 93–110.

[78] M. Stoll. Invariant Potential Theory in the Unit Ball of C^n. New York: Cambridge University Press, 1994.

[79] W. Stoll. "The characterization of the strictly parabolic manifolds." In: Ann. Scuola. Norm. Pisa 7(1) (1980), pp. 87–154.

[80] F. Weisz. "Unrestricted Cesàro summability of d-dimensional Fourier series and Lebesgue points." In: Constructive Mathematical Analysis 4.2 (2021), pp. 179– 185.

[81] Z. Xu. "Schwarz lemma for pluriharmonic functions." In: Indagationes Mathematicae 27 (2016), pp. 923–929.

[82] A. Zygmund. "On the differentiability of multiple integrals." In: Fundamenta Mathematicae

23.1 (1934), pp. 143–149.

[83] A. Zygmund. “On the Summability of Multiple Fourier Series.” In: American Journal of Mathematics 69 (1947), pp. 836–850.

[84] A. Zygmund. Trigonometric Series: Vol. I, II. Cambridge University Press, 1968.

[85] A. Zygmund. Trigonometric Series: Vol. II. Boston: Cambridge University Press, 1959.

5. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

Метод истраживања је дедуктиван и теоријски, заснива се на ригорозним доказима који се ослањају на раније добијене резултате. Посебно издвајамо интегралне репрезентације, развој у вишеструке степене редове и процјене градијената за холоморфне функције.

Кандидат је показао да адекватно користи поменути теоријски апарат за рјешавање проблема. Није дошло до промјене плана истраживања који је дат приликом пријаве докторске дисертације.

6. РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

Оригинални и најзначајнији резултати овог истраживања огледају се у:

1) Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће.
2) Дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и *M*-инваријантног реалног градијента за такве функције.
3) Доказан је Харнаков тип резултата за холоморфне функције на D^n и на B^n .
4) Доказано је да је функција, дефинисана на D^n , појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска на D^n .
5) Дат је и други опис простора функција које су истовремено хармонијске и *M*-хармонијске на D^n .
6) Изучавана је и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n .
7) Уведене су појединачно (α, β)-хармонијских функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n.
8) Појединачно (α, β)- хармонијске функције су развијене у ред и рјешен је Дирихлеов проблем за непрекидну функцију дефинисану на истакнутој граници T^n .
9) Развијена је H^p теорија за појединачно (α,β)-хармонијске функције: интегралне репрезентације мјерама и L^p функцијама на истакнутој граници T^n, конвергенција у норми и слаба* конвергенција на T^n.
10) Добијен је слаби (1,1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију.
11) Показано је да функције на D^k, добијене фиксирањем *n-k* промјенљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од *k* промјенљивих.
12) Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α, β)-хармонијске функције у диску и за појединачно

хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

Критичност и коректност тумачења резултата

Резултати истраживања су приказани веома комплектно, на јасан и прегледан начин.

Теоријски допринос и нови истраживачки резултати

Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће.

С обзиром да јединична лопта и B^n и јединични полидиск D^n нису бихоломорфно еквивалентни од интереса је изучавање која својства имају функције на D^n које су истовремено хармонијске и *M*-хармонијске на D^n. У дисертацији је рјешен тај отворен проблем од 1977. године.

Такође, у дисертацији су уведене нове класе функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n, и тиме су отварени нови путеви за даља истраживања.

7. ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

На основу свега што је наведено у Извјештају, Комисија закључује да је докторска дисертација Јелене Гајић под насловом „**Простори плурихармонијских, М-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску**", израђена у складу са образложењем које је кандидат приложио приликом пријаве ове теме. Докторска дисертација је урађена према правилима и принципима научно-истраживачког рада и резултат је оригиналног научног рада кандидата. Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће. Дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и М-инваријантног реалног градијента за такве функције. Доказан је Харнаков тип резултата за холоморфне функције на D^n и на B^n. Доказано је да је функција дефинисана на јединичном полидиску у C^n појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска и *М*-хармонијска на D^n. Такође, након увођења појединачно (α, β)-хармонијских функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n , развијена је H^p теорија из тих класа.

Будући да је кандидат показао темељно познавање предмета истраживања, те у потпуности одговорио на проблематику која се разматра у дисертацији, Комисија предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци да прихвате овај Извјештај и одобре јавну одбрану докторске дисертације.

З. Митровић

Мјесто и датум: Бања Лука,

академик Зоран Митровић, редовни професор
Предсједник комисије

Миодраг Матељевић

академик Миодраг Матељевић, редовни професор
Члан

В. Јовановић

др Владимир Јовановић, ванредни професор
Члан

Пранић Мирослав

др Мирослав Пранић, редовни професор

Члан

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије дужан је да у извјештај унесе образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извјештај.