



РЕПУБЛИКА СРБИЈА
УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
Природно-математички факултет
Број: 19/4.19/23
Датум: 16.11.2023 199
БАЊАЛУКА

ИЗВЈЕШТАЈ

о оцјени подобности теме, кандидата и ментора за израду докторске дисертације

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Орган који је именовано комисију: Научно-наставно вијеће Природно-математичког факултета и Сенат Универзитета у Бањој Луци

Датум именовања комисије: 16.11.2022.

Број одлуке: 19/3.3795/22

Састав комисије:

- | | | |
|---|-------------------|---------------------------------|
| 1. Проф. др Зоран Митровић | Редовни професор | Математичка анализа и примјене |
| Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
| Електротехнички факултет Универзитета у Бањој Луци | | предсједник |
| Установа у којој је запослен-а | | Функција у комисији |
| 2. Проф. др Миодраг Матељевић | Редовни професор | Математичка анализа и примјене |
| Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
| Математички факултет Универзитета у Београду | | члан |
| Установа у којој је запослен-а | | Функција у комисији |
| 3. Проф. др Владимир Јовановић | Ванредни професор | Математичка анализа и примјене |
| Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
| Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци | | члан |
| Установа у којој је запослен-а | | Функција у комисији |

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме: Ивана (Милош) Савковић
2. Датум рођења: 07.08.1988. Мјесто и држава рођења: Теслић, БИХ

II.1 Основне студије

Година уписа: Година завршетка: Просјечна оцјена током студија:

Универзитет: Универзитет у Бањој Луци

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Математика и информатика

Звање: Дипломирани математичар и информатичар

II.2 Мастер или магистарске студије

Година уписа: Година завршетка: Просјечна оцјена током студија:

Универзитет: Универзитет у Бањој Луци

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Математика

Звање: Магистар математике

Научна област: Математичка анализа и примјене

Наслов завршног рада: Теореме интерполације са примјенама

II.3 Докторске студије

Година уписа:

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Математика

Број ЕЦТС до сада остварених: Просјечна оцјена током студија:

II.4 Приказ научних и стручних радова кандидата

Р. бр.	Аутори, наслов, издавач, број страница	Категорија ¹
1.	М. Arsenović, I. Savković , Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, <i>Annals of Functional Analysis</i> 13 (70) (2022), 15 страница	SCI листа
<p><i>Кратак опис садржине:</i> У раду се проучава тежинска Бергманова пројекција која дјелује на простор функција са мјешовитом нормом и дуалност простора са мјешовитом нормом. Доказано је да је Бергманова пројекција P_γ ограничен оператор на тежинском Лебеговом простору $L^{p,\lambda}(\Omega)$, за одређени распон параметара p, λ и γ. Овдје је Ω ограничен домен са глатком границом. Даље се овај резултат користи да се докаже ограниченост оператора P_γ који дјелује на простор са мјешовитом нормом $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, поново под одређеним условима за параметре. Описан је и дуал простора хармонијских функција са мјешовитом нормом $W^{p,q}_\alpha(\Omega)$ за одређени распон параметара.</p>		
<p><i>Рад припада проблематици докторске дисертације:</i> <u>ДА</u> НЕ ДЈЕЛИМИЧНО</p>		

Р. бр.	Аутори, наслов, издавач, број страница	Категорија
2.	I. Savković , Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in \mathbb{R}^n , <i>Czechoslovak Mathematical Journal</i> 72 (2022), 1205-1216.	SCI листа
<p><i>Кратак опис садржине:</i> Главни резултат је карактеризација мјера Карлесона за тежинске просторе хармонијских функција са мјешовитом нормом. Прво је добијен резултат о еквиваленцији норми на овим просторима. Затим је дат потребан и довољан услов геометријске природе да се простор хармонијских функција са мјешовитом нормом утапа у одговарајући простор функција са мјешовитом нормом.</p>		
<p><i>Рад припада проблематици докторске дисертације:</i> <u>ДА</u> НЕ ДЈЕЛИМИЧНО</p>		

Р. бр.	Аутори, наслов, издавач, број страница	Категорија
3.	I. Savković , Marcinkijevičeva teorema interpolације sa primjenom, <i>MAT-KOL (Banja Luka) XXV(3)</i> (2019), 177-190.	Стручни рад у часопису националног значаја (с рецензијом)
<p><i>Кратак опис садржине:</i> У раду је приказан важан резултат из теорије интерполације, наиме Марцинкијевичева теорема о интерполацији. Осим самог резултата, представљен је и аутор истог, Јозеф Марцинкијевич, као једна од најзначајнијих личности у пољској математици. Споменута теорема се у раду користи за за добијање битних неједнакости у хармонијској анализи па метода рада подразумијева коришћење елемената функционалне анализе и теорије мјере и интеграције.</p>		

¹ Категорија се односи на оне часописе и научне скупове који су категорисани у складу са Правилником о публикацији научних публикација („Службени гласник РС“, бр. 77/10) и Правилником о мјерилима за остваривање и финансирање Програма одржавања научних скупова („Службени гласник РС“, бр. 102/14).

Рад припада проблематици докторске дисертације: ДА НЕ ДЈЕЛИМИЧНО

Да ли кандидат испуњава услове? ДА НЕ

III ПОДАЦИ О МЕНТОРУ/КОМЕНТОРА

Биографија ментора/коментора (до 1000 карактера):

Милош Арсеновић је рођен 1962. године у Београду. Докторат је стекао на Универзитету Беркли, 1988. године са тезом *A C*-Algebra of Singular Integral Operations on the Poincare plane*. Од 1983. године је ангажован на Математичком факултету Универзитета у Београду, гдје је стекао звање редовног професора. Гостујући је професор на ПМФ-у Универзитета у Бањој Луци од 1996. године.

Објавио је значајан број публикација и научних радова.

Радови из области којој припада приједлог докторске дисертације:

Р. бр.	Аутори, наслов, издавач, број страница
1.	M. Arsenović, I. Savković , Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, <i>Annals of Functional Analysis</i> 13 (70) (2022).
2.	M. Arsenović, M. Mateljević , On Ahlfors–Beurling Operator, <i>Journal of Mathematical Sciences</i> 259 (1) (2021), 1-9.
3.	M. Arsenović , Atomic decompositions in weighted Bergman spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains, <i>Filomat</i> 35 (8) (2021), 2545-2563.
4.	M. Arsenović, T. Jovanović , Embedding of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in \mathbb{R}^n , <i>Open Mathematics</i> 17 (2019), 1260–1268.
5.	M. Arsenović, R. F. Shamoyan , On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces, <i>Kragujevac Journal of Mathematics</i> 37(1) (2013), 45–64.
6.	M. Arsenović, R. F. Shamoyan , Some remarks on $H^{p,s}$ analytic function space in the unit disk and related estimates, <i>Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica</i> (2013), 145-156.
7.	M. Arsenović, R. F. Shamoyan , Two remarks on harmonic Bergman spaces in B^n and \mathbb{R}^{n+1} , <i>Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica</i> 57(4), 2012.
8.	R. F. Shamoyan, M. Arsenović , On Multipliers of Holomorphic $F^{p,q}_\alpha$ Type Spaces on the Unit Polydisc, <i>Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics</i> 5(4) (2012), 471–479.
9.	M. Arsenović, R.F. Shamoyan , Embedding relations and boundedness of the multifunctional operators in tube domains over symmetric cones, <i>Filomat</i> 25(4)(2011), 109-126.

10.	M. Arsenović, D. Kečkić, Bergman spaces on the complement of a lattice, <i>Archiv der Mathematik</i> 81(5)(2003), 575-584.
-----	---

Да ли ментор испуњава услове? **ДА** **НЕ**

IV ОЦЈЕНА ПОДОБНОСТИ ТЕМЕ

IV.1 Формулација назива тезе (наслова)

Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност
--

Наслов тезе је подобан? **ДА** **НЕ**

IV.2 Предмет истраживања

<p>Карактеризација мјера Карлесона, ограниченост Бергманове пројекције и дуалност су централни проблеми у теорији простора аналитичких и хармонијских функција. Истраживање се фокусира на случај хармонијских функција у ограниченој области Ω у \mathbb{R}^n са глатком границом. Посматрају се простори са мјешовитом нормом са степеном тежином, мјере Карлесона за ове просторе, оператор Бергманове пројекције и дуални простори.</p>
--

Предмет истраживања је подобан? **ДА** **НЕ**

IV.3 Најновија истраживања познавања предмета дисертације на основу изабране литературе са списком литературе

<p>Просторе хармонијских функција (тежински) са мјешовитом нормом на горњем полупростору су проучавали Арсеновић и Shamoan у [3] те је доказана Карлесонова теорема утапања. Liu, Shi и Ren су у [36] истраживали ограниченост Бергманове пројекције на хармонијским просторима са мјешовитом нормом на лопти те су ријешили и проблем дуалности. Простори хармонијских функција (безтежински) са мјешовитом нормом на ограниченим глатким доменима у \mathbb{R}^n у контексту Карлесонових мјера, Бергманових пројекција су истражени у [27]. Уопштење ових простора, простори са тежином степеног типа су дефинисани у [44] и Карлесонова мјера за исте је описана одговарајућим утапањем простора функција и то у случају када су параметри p и q већи од 1. Вриједи напоменути да Карлесонова мјера за исте просторе на лопти претходно није описана; карактеризација из [44] обухвата и овај специјални случај домена. Ограниченост Бергманових пројекција за одређене вриједности параметара простора и проблем одређивања дуала ових простора су разматрани у [6]. Треба истаћи да су простори функција са мјешовитом нормом у већој мјери истражени у аналитичком случају, нпр у [1, 7, 18, 19, 29], стога је интересантно истражити хармонијски случај и то на општијим доменима.</p>

- [1] P. Ahern and M. Jevtić, Duality and multipliers for mixed norm spaces, *Michigan Math. J.* 30 (1983), 53–64.
- [2] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1999.
- [3] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces, *Kragujevac Journal of Mathematics* 37(1) (2013), 45–64.
- [4] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On boundedness of the multifunctional Bergman type operators in tube domains over symmetric cones, *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute* 158 (2012), 83–97.
- [5] M. Arsenović, T. Jovanović, Embedding of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in \mathbb{R}^n , *Open Mathematics* 17 (2019), 1260–1268.
- [6] M. Arsenović, I. Savković, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, *Annals of Functional Analysis* 13 (70) (2022).
- [7] K. L. Avetisyan and A. I. Petrosyan, Normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in \mathbb{C}^n , *J. Korean Math. Soc.* 55 (2) (2018), 313–326.
- [8] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic function theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
- [9] O. Blasco, Multipliers on spaces of analytic functions, *Canad. J. Math.* 47 (1995), 44–64.
- [10] M. Calzi, M. M. Peloso, Carleson and reverse Carleson measures on homogeneous Siegel domains. arXiv:2105.06342v2 (2021).
- [11] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 921–930.
- [12] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.* 76 (1962), 547–559.
- [13] B. R. Choe, Y. J. Lee, K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman space. *Nagoya Mathematical Journal* 174 (2004), 165–186.
- [14] D. Debertol, Besov spaces and the boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains, *Publ. math.* 49 (2005), 21–72.
- [15] A. E. Džrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the theory of A^p spaces, Teubner-Texte zur Mathematik, 1988.
- [16] P. L. Duren, Extension of a theorem of Carleson, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 143–146.
- [17] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York and London 1970.
- [18] S. Gadbois, Mixed-norm generalization of Bergman spaces and duality, *Proceedings of the American mathematical society*, 104(4), 1988.
- [19] D. Gu, Bergman projections and duality in weighted mixed-norm spaces of analytic functions, *Michigan Math. J.* 39(1), 1992.
- [20] M. Engliš, Boundary singularity of Poisson and harmonic Bergman kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 429 (2015), 233–272.
- [21] C. Fefferman, E. M. Stein, H^p Spaces of Several Variables, *Acta Math.* 129 (1972), 137–193.
- [22] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 38 (1972), 746–765.
- [23] T.M. Flett, Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk, *J. Math. Anal. Appl.* 39 (1972), 125–158.
- [24] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.* 34 (1932), 403–439.
- [25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math.* 12 (1941), 221–256.

- [26] Z. Hu, Estimate for the integral mean of harmonic function on bounded domain in \mathbb{R}^n , *Science in China, Series A* 38(1) (1995), 36–46.
- [27] Z. Hu, X. Lv, Carleson type measures for harmonic mixed norm spaces with application to Toeplitz operators, *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 34B(4) (2013), 623–638.
- [28] L. Huang, D. Yang, On function spaces with mixed norms— A survey, *Journal of mathematical study* (2019), 1-75.
- [29] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions, *Complex Variables* 8 (1987), 293-301.
- [30] T. Jovanović, On Carleson-type embeddings for Bergman spaces of harmonic functions, *Analysis Mathematica* 44(4) (2017), 493–499.
- [31] H. Kang, H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domains, *Journal of Functional Analysis* 185 (2001), 220–239.
- [32] H. Keshavarzi, Characterization of forward, vanishing and reverse Bergman Carleson measures using sparse domination. arXiv:2110.08926v1 (2021).
- [33] P. Koosis, Introduction to H^p spaces, second edition, Cambridge University Press, 1999.
- [34] S. G. Krantz, Function theory of several complex variables, second edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
- [35] S. G. Krantz, H. R. Parks, The geometry of domains in space, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Birkhauser Boston, Inc., Boston, Mass., 1999.
- [36] C. Liu, J. Shi, G. Ren, Duality for harmonic mixed-norm spaces in the unit ball of \mathbb{R}^n , *Ann. Sci. Math. Quebec* 25 (2) (2001), 179–197.
- [37] Y. Liu, Boundedness of the Bergman type operators on mixed norm spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society* 130(8) (2002), 2363 -2367.
- [38] M. Mateljević, Procena normi i ekstremalni problemi u H^1 , Doktorska teza, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1979.
- [39] K. Nam, I. Park, Volume integral means of harmonic functions on smooth boundary domains, *Bull. Korean Math. Soc.* 51(4) (2014), 1195–1204.
- [40] R. Nevanlinna, Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, *Annales Academię Scientiarum Fennicę*, vol. 13 (1), 1919.
- [41] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, *Journal of Soviet Mathematics* 9 (1978), 228–243.
- [42] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw-hill international editions, Mathematics series, 1987.
- [43] C. Tong, J. Li, Carleson measures on the weighted Bergman spaces with Bekolle weights. *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 42(4) (2021), 583–600.
- [44] I. Savković, Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in \mathbb{R}^n , *Czechoslovak Mathematical Journal* 72 (2022), 1205-1216.
- [45] K. Sierra, Classical operators on weighted Bergman and mixed norm spaces, academic dissertation, University of Eastern Finland, Department of Physics and Mathematics, Joensuu 2018.
- [46] K. Zhu, Spaces of holomorphic functions in the unit ball, Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [47] K. Zhu, Operator theory in Function Spaces, American Mathematical Society, Second Edition, 2007.

IV.4 Циљеви истраживања

Теорија простора функција представља веома важну област математичке анализе. Централни проблеми у теорији простора аналитичких и хармонијских функција су карактеризација мјера Карлесона, ограниченост Бергманове пројекције и дуалност. У фокусу истраживања је случај хармонијских функција у ограниченој области Ω у \mathbb{R}^n са глатком границом, будући да је случај аналитичких функција више истражен. Циљ истраживања је дати потпуну информацију о просторима са мјешовитом нормом са степеном тежином и уопштити низ ранијих резултата добијених за нетежинске просторе и просторе на геометријски једноставним доменама.

Циљеви истраживања су одговарајући?

ДА

НЕ

IV.5 Хипотезе истраживања: главна и помоћне хипотезе

Главне хипотезе:

1. Карлесонове мјере за просторе функција са мјешовитом нормом у ограниченим областима у \mathbb{R}^n са глатком границом се могу описати помоћу утапања одговарајућих простора функција, као што је то случај са Хардијевим, Бергмановим и осталим просторима функција за које је споменута карактеризација добијена.
2. Оператор Бергманове пројекције је под одређеним условима ограничен на тежинском простору функција са мјешовитом нормом на ограниченој области у \mathbb{R}^n са глатком границом.
3. Дуал тежинског простора функција са мјешовитом нормом на ограниченој области у \mathbb{R}^n са глатком границом се може описати под одређеним условима на параметре простора.
4. Добијени резултати имају примјену на рјешавање осталих класичних проблема теорије простора функција.

Помоћне хипотезе:

1. Норма на простору хармонијских функција има еквивалентну репрезентацију преко декомпозиције домена. Ова репрезентација је од помоћи за карактеризацију Карлесонових мјера на овим просторима, те за доказивање ограничености Бергманове пројекције.
2. Тежинска Бергманова пројекција је ограничен оператор на тежинском Лебеговом простору функција са тежином која је различита од тежине саме пројекције, под одређеним условима на параметре.

Хипотезе истраживања су јасно дефинисане?

ДА

НЕ

IV.6 Очекивани резултати hipoteze

-Карактеризација мјера Карлесона за тежинске просторе хармонијских функција са мјешовитом нормом, у смислу повезивања геометријског услова на мјеру са утапањем одговарајућих простора.

Наиме геометријски услов на Борелову мјеру се повезује са утапањем простора хармонијских функција са мјешовитом нормом у простор мјерљивих функција са мјешовитом нормом, са истим параметрима простора.

-Ограниченост оператора Бергманове пројекције који дјелује на простор функција са мјешовитом нормом, за одређени распон параметара.

-Опис дуала простора функција са мјешовитом нормом за одређени распон параметара простора, опис дуала простора хармонијских функција користећи резултат о ограничености Бергманове пројекције.

-Резултати у вези са уопштењем оператора Бергманове пројекције као примјена добијених резултата

Очекивани резултати представљају значајан научни допринос? ДА НЕ

IV.7 План рада и временска динамика

-Проучавање литературе и претходних резултата

-Обликовање истраживачке теме

-Постављање циљева и хипотеза

-Разрада идеја и математичких метода

-Рад на дијеловима предмета истраживања

-Рад на реализацији циља истраживања и добијање очекиваних резултата

Дио истраживања у оквиру предложене теме кандидат је већ успјешно реализовао.

Планирано је да се остале активности у вези са израдом докторске дисертације реализују у периоду до годину дана.

План рада и временска динамика су одговарајући? ДА НЕ

IV.8 Метод и узорак истраживања

Будући да је фокус истраживања простор хармонијских функција са мјешовитом нормом, у истраживању ће се користити до сада развијене методе хармонијске анализе. Користиће се техника декомпозиције домена на љуске које се сужавају како се приближавају граници. Споменута техника је слична добро познатој техници Витнијеве декомпозиције отвореног скупа у \mathbb{R}^n и коришћена је у [27].

За доказивање једног смјера теореме о утапању, користиће се тест функције. Наиме, када претпостављамо да се простор хармонијских функција са мјешовитом нормом утапа у простор функција дефинисан користећи Борелову мјеру и желимо доказати да је та Борелова мјера и Карлесонова мјера, чињеницу о утапању простора примјењујемо на такозване тест функције које су обично повезане са репродукујућим језгром. Ова техника је уобичајена код доказивања једног смјера теореме утапања и за друге просторе функција.

Истраживање се бави и Бергмановим пројекцијама које представљају интегралне операторе на просторима функција, стога ће се користити методе интегралних оператора.

Битан алат при доказивању ограничености Бергманове пројекције је Шуров тест који се уобичајено користи у оквиру теорије оператора.

За добијање резултата дуалности, користиће се класичне методе теорије дуалности Банахових простора и простора низова.

Неке од метода које ће се често користити у раду су и примјена Хелдерове неједнакости, неједнакости Минковског те Фубинијеве теореме.

Метод и узорак су одговарајући?

ДА

НЕ

IV.9 Мјесто, лабораторија и опрема за експериментални рад

Кандидат се не бави експерименталним истраживањем.

Услови за експериментални рад су одговарајући?

ДА

НЕ

IV.10 Методе обраде података

Кандидат посматра проблеме у теоријској математици. Не користи методе обраде података.

Предложене методе су одговарајући?

ДА

НЕ

V ЗАКЉУЧАК

Кандидат је подобан	<u>ДА</u>	НЕ
Тема је подобна	<u>ДА</u>	НЕ

Образложење (до 500 карактера):

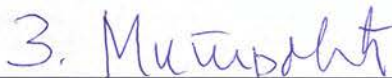
Предложена тема докторске дисертације „Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност“ је актуелна у оквиру теорије простора функција и од интереса је за хармонијску, функционалну анализу и теорију оператора.

Кандидат је у споменутој проблематици, већ остварио значајне научне резултате, од којих су два рада објављена у часописима на SCI листи. Ови радови ће бити саставни дио докторске дисертације.

Проф. др Милош Арсенић (ментор) испуњава услове за менторство предвиђене Правилима студирања на трећем циклусу студија, број: 02/04-3.1907-6/22.

Узимајући у обзир наведено, Комисија даје позитивну оцјену подобности теме, кандидата и ментора за израду докторске дисертације „Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност“, те предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета и Сенату Универзитета у Бањој Луци да се предложена тема прихвати и упути у даљу процедуру.

Датум: 16.01.2023.




Проф. др Зоран Митровић

Предсједник комисије



Проф. др Миодраг Матељевић

Члан 1



Проф. др Владимир Јовановић

Члан 2