



ИЗВЈЕШТАЈ

за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада¹

1. ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Орган који је именовео комисију: Научно-наставно вијеће Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета Универзитета у Бањој Луци

Датум именовања комисије: 03.09.2026.

Број одлуке: 14/3.1320-10/26

Чланови комисије:

- | | | |
|----|---|---------------------|
| 1. | Валентина Голубовић-Бугарски | редовни професор |
| | Презиме и име | Звање |
| | Примијењена механика | |
| | Научно поље и ужа научна/умјетничка област | |
| | Машински факултет Универзитета у Бањој Луци | предсједник |
| | Установа у којој је запослен/а | Функција у комисији |
| 2. | Мирослав Марјановић | ванредни професор |
| | Презиме и име | Звање |
| | Техничка механика и теорија конструкција | |
| | Научно поље и ужа научна/умјетничка област | |
| | Грађевински факултет Универзитета у Београду | члан |
| | Установа у којој је запослен/а | Функција у комисији |
| 3. | Наташа Мрђа Бошњак | доцент |
| | Презиме и име | Звање |
| | Механика и теорија конструкција | |
| | Научно поље и ужа научна/умјетничка област | |
| | Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет
Универзитета у Бањој Луци | члан |
| | Установа у којој је запослен/а | Функција у комисији |
| 4. | | |
| | Презиме и име | Звање |
| | Научно поље и ужа научна/умјетничка област | |
| | Установа у којој је запослен/а | Функција у комисији |

¹ У даљем тексту „дисертација / умјетнички рад”.

5.	Презиме и име	Звање
Научно поље и ужа научна/умјетничка област		
Установа у којој је запослен/а		Функција у комисији

2. ПОДАЦИ О СТУДЕНТУ					
Име, име једног родитеља, презиме: Сњежана, Здравко, Миловановић					
Датум рођења: 01.03.1993.					
Мјесто и држава рођења: Прњавор, Босна и Херцеговина					
2.1. Студије првог циклуса или основне студије или интегрисане студије					
Година уписа:	2012	Година завршетка:	2017	Просјечна оцјена током студија:	9.63
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/Академија: Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет					
Студијски програм: Грађевинарство					
Стечено звање: Дипломирани инжењер грађевинарства					
2.2. Студије другог циклуса или мастер студије					
Година уписа:	2017	Година завршетка:	2020	Просјечна оцјена током студија:	10.00
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/Академија: Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет					
Студијски програм: Грађевинарство					
Назив завршног рада другог циклуса или мастер тезе, датум одбране:					
Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни, 14.2.2020.					
Ужа научна/умјетничка област завршног рада другог циклуса или мастер тезе:					
Механика и теорија конструкција					
Стечено звање: Мастер инжењер грађевинарства					
2.3. Студије трећег циклуса					
Година уписа:	2020	Број ECTS бодова остварених до сада:	155	Просјечна оцјена током студија:	10.00
Факултет/Академија: Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет					

Студијски програм: Грађевинарство		
2.4. Приказ научних и стручних односно умјетничких радова студента²		
Навести појединачне радове, са навођењем DOI бројева, односно концерте / снимљена дјела. Додати потребан број редова. Користити исти стил за навођење свих референци у 2.4.		
Р. б.	Основни подаци о научном раду	Цитатна база
1.	S. Milovanović , J. Kiendl, and Y. Vetyukov, "Isogeometric approximation of shear strain for rod contact problems," <i>Acta Mechanica</i> , Jun. 2026, doi: 10.1007/s00707-026-04782-7	Web of Science Core Collection
2.	A. Borković, S. Kovačević, G. Radenković, S. Milovanović , M. Guzijan-Dilber, "Rotation-free isogeometric analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli–Euler beam", <i>Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering</i> , vol. 334, pp. 238-267, 2018, doi: 10.1016/j.cma.2018.02.002	Web of Science Core Collection
3.	A. Borković, S. Kovačević, G. Radenković, S. Milovanović , D. Majstorović, "Rotation-free isogeometric dynamic analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli–Euler beam", <i>Engineering Structures</i> , vol 181, pp. 192-215, 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2018.12.003.	Web of Science Core Collection
4.	A. Borković, G. Radenković, D. Majstorović, S. Milovanović , D. Milašinović, R. Cvijić, "Free vibration analysis of singly curved shells using the isogeometric finite strip method", <i>Thin-Walled Structures</i> , vol. 157, 107125, 2020, doi: 10.1016/j.tws.2020.107125.	Web of Science Core Collection
5.	V. Golubović-Bugarski, B. Sredanović, S. Milovanović , R. Vukomanović, S. Petković, M. Todić, "Investigation of dynamic behaviour of one complex steel structure", <i>Journal Of Physics: Conference Series</i> , ICAS2022-53 2540 (2023), 012028, 2023, doi: 10.1088/1742-6596/2540/1/012028.	SCOPUS
6.	S. Milovanović , A. Borković, D. Tatar, and O. Mijatović, "Isogeometric Analysis of In-Plane Free Vibrations of a Curved Timoshenko Beam," <i>AGG+ Journal for Architecture, Civil Engineering, Geodesy, and Related Scientific Fields</i> , vol. 14, no. 1, pp. 1–24, Dec. 2026, doi: 10.61892/AGG202601002M.	DOAJ
7.	S. Milovanović , A. Borković, and O. Mijatović, "A review of computational contact mechanics using isogeometric analysis", <i>Book of proceedings of scientific conference: Contemporary theory and practice in construction XVII</i> , Banja Luka, 2026, ISSN: 2566-4484, doi: 10.61892/STP202601033M	-----
8.	A. Borković, G. Radenković, S. Milovanović , D. Majstorović, "Some numerical aspects of a linear static isogeometric analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli-Euler beam", <i>Book of proceedings of scientific conference: Contemporary theory and practice in construction XIII</i> , Banja Luka, 2018, ISSN: 2566-4484, doi: 10.7251/STP1813110B.	-----
9.	A. Borković, D. Majstorović, S. Milovanović , Duy Vo, "Free vibration analysis of singly curved clamped shells using the isogeometric finite strip method", <i>Book of proceedings of scientific conference: Contemporary theory and practice in construction XV</i> , Banja Luka, 2022, ISSN 2566-4484, doi: 10.7251/STP2215112B	-----

² У складу са чланом 34 [Правила студирања на трећем циклусу студија, септембра 2022. године.](#)

Припадност рада ужој научној/умјетничкој области којој припада предмет истраживања докторске дисертације

☒ ДА

☐ НЕ

3. УВОДНИ ДИО ОЦЕНЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ / УМЈЕТНИЧКОГ РАДА

Моделирање механичког контакта примјеном изогеометријских гредних формулација

Научно поље: Грађевинарство

Ужа научна област: Механика и теорија конструкција

09.06.2026. године, Одлука Научно-наставног вијећа Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета Универзитета у Бањој Луци број: 14/3.876-2/26

18.06.2026. године, Приједлог одлуке Научно-наставног вијећа Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета Универзитета у Бањој Луци број: 14/3.965-11/26

02.07.2026. године, Одлука Сената Универзитета у Бањој Луци број: 02/04-3.1825-58/26

Садржај

1	УВОД.....	1
2	ПРЕТХОДНА ИСТРАЖИВАЊА	5
2.1	Анализа контактних проблема.....	6
2.2	Изогеометријска анализа	10
2.3	Анализа контактних проблема у оквиру ИГА.....	13
3	ФОРМУЛАЦИЈЕ ГРЕДНИХ МОДЕЛА.....	18
3.1	Тимошенков модел	18
3.2	Бернули-Ојлеров модел	21
3.3	Модел са независном апроксимацијом смицања	22
3.4	Инкрементални модел	24
4	ОСНОВЕ КОНТАКТНИХ ФОРМУЛАЦИЈА.....	28
4.1	Лагранжов метод.....	28
4.2	Пеналти метод.....	30
4.3	Аугментовани Лагранжов метод.....	32
5	Б-СПЛАЈН И НЕУНИФОРМНИ РАЦИОНАЛНИ Б-СПЛАЈН	33
5.1	Б-сплајн	33
5.1.1	Безиерове криве.....	35
5.1.2	Инсертовање чворова.....	37
5.1.3	Елевација реда полинома.....	38
5.1.4	Особине Б-сплајна	38
5.1.5	Описивање геометрије Б-сплајн функцијама	39
5.2	НЕУНИФОРМНИ РАЦИОНАЛНИ Б-СПЛАЈН	43
5.2.1	Описивање геометрије НУРБС функцијама.....	45
5.3	Побољшање мреже коначних елемената	47
5.3.1	h - побољшање мреже коначних елемената	48
5.3.2	p - побољшање мреже коначних елемената	50
5.3.3	k - побољшање мреже коначних елемената.....	51
6	НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ	54
6.1	Статичка анализа.....	55
6.1.1	Конзола оптерећена концентрисаном силом на крају	55
6.1.2	Конзола оптерећена расподијељеним моментом	69

6.1.3	Греда оптерећена концентрисаном силом на средини	71
6.2	Контактни проблеми.....	76
6.2.1	Контакт конзоле са крутом подлогом	76
6.2.2	Контакт између ремена и ременице	89
7	ЗАКЉУЧАК.....	96
	ЛИТЕРАТУРА.....	100

Докторска дисертација под називом „Моделирање механичког контакта примјеном изогеометријских гредних формулација“ је написана на српском језику, ћириличним писмом на 119 страна А4 формата. Дисертација је систематизована у седам основних поглавља: Увод, Претходна истраживања, Формулације гредних модела, Основе контактних формулација, Б-сплајн и неуниформни рационални Б-сплајн, Нумерички примјери и Закључак. Поред основног текста, на почетку дисертације дате су Информације о ментору и дисертацији са резимеом на српском и енглеском језику, посвета, садржај, списак табела и списак слика, док су на крају рада дате Литература и Биографија аутора. Дисертација садржи 14 табела, 92 слике и 170 литературних навода.

У уводном поглављу образложена је актуелност разматране теме, као и научни значај истраживања. Указано је на ограничења класичних метода коначних елемената као и на предности изогеометријске анализе у моделирању гредних система. Дефинисани су предмет и циљ истраживања, постављене су хипотезе и дат је преглед организације дисертације. У другом поглављу дат је систематичан преглед досадашњих истраживања из области нелинеарне анализе гредних система, контактне механике и изогеометријске анализе. Извршен је критички заснован преглед релевантне и актуелне научне литературе, који обухвата монографије, научне радове објављене у водећим међународним часописима, као и друге научне изворе. У трећем поглављу приказане су теоријске основе разматраних гредних модела. Изложене су формулације Тимошенковог модела, Бернули-Ојлеровог модела, као и Модела са независном апроксимацијом смицања и Инкременталног модела. Четврто поглавље посвећено је основама контактне механике. У њему су приказане контактне формулације које се често примјењују у нумеричкој анализи, укључујући Лагранжов метод, пеналти метод и аугментовани Лагранжов метод. За сваку од наведених формулација разматране су теоријске поставке, предности, ограничења и могућности примјене у анализи механичког контакта. У петом поглављу изложене су основе Б-сплајн и неуниформних рационалних Б-сплајн (НУРБС) функција, које представљају математичку основу изогеометријске анализе. Обрађени су поступци инсертовања чворова и елевације степена полинома, као и особине Б-сплајн и НУРБС функција. Анализирано је h -, p - и k -побољшање мреже коначних елемената, при чему је приказан њихов утицај на квалитет апроксимације, континуитет функција и нумеричку ефикасност анализе. У шестом поглављу приказани су нумерички примјери. Обухваћени су статички проблеми различитих гредних система, као и контактни проблеми који обухватају контакт конзоле са крутом подлогом и контакт ремена и ременице. У завршном поглављу издвојени су најзначајнији резултати истраживања и истакнуте су њихове предности. Такође су предложени могући правци будућих истраживања.

1. Наслов дисертације / умјетничког рада.
2. Научно поље и ужа научна/умјетничка област.
3. Датум прихватања теме дисертације / умјетничког рада и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета.
4. Датум прихватања извјештаја комисије за оцјену подобности студента, теме и ментора за израду дисертације / умјетничког рада и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета.
5. Садржај дисертације / умјетничког рада уз навођење броја страна.
6. Истаћи основне податке о дисертацији / умјетничком раду: обавезно укључујући обим, број и називе поглавља, број табела, слика, шема, графикана и број литературних навода.

4. УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

Нелинеарна анализа конструкција представља једну од најсложенијих области савремене механике, у оквиру које посебно мјесто заузима механички контакт, услед изражених геометријских нелинеарности, промјенљивих граничних услова и сложене интеракције између контактних тијела. Класичне формулације методе коначних елемената врше описивање почетне геометрије и поља непознатих функцијама ограниченог континуитета, те показују одређена ограничења у погледу тачности, конвергенције и прорачунске ефикасности. У условима великих помјерања и ротација, и сложене геометрије, класични приступ показује ограничену ефикасност и осјетљивост на избор дискретизације, што знатно утиче на конвергенцију рјешења. Изогеометријска анализа омогућава директно повезивање геометријског модела и нумеричке анализе примјеном Б-сплајн и НУРБС функција, чиме се обезбјеђује тачнији опис геометрије, виши степен континуитета апроксимације и већа флексибилност приликом побољшања дискретизације.

Предмет истраживања докторске дисертације обухвата нумеричко моделирање механичког контакта гредних система примјеном изогеометријских гредних формулација. Основни циљ дисертације је развој и анализа ефикасних и поузданих нумеричких модела за рјешавање статичких и контактних проблема. Разматран је и приступ у којем се у првом кораку рјешава једноставнији модел заснован на Бернули-Ојлеровој теорији, док се у другом, корекционом кораку, додаје смичућа деформабилност. Предност оваквог приступа огледа се у томе што се корекциони корак реализује рјешавањем само једног линеарног система једначина, чиме се постиже већа прорачунска ефикасност. Такође је анализиран утицај различитих контактних формулација и локалног побољшања мреже на понашање развијених нумеричких модела, а добијени резултати су верификовани поређењем са аналитичким, полуаналитичким и референтним нумеричким рјешењима. Истраживање је проведено полазећи од четири основне хипотезе: да развој ефикасног, стабилног и поузданог нумеричког модела представља основу за адекватно моделирање нелинеарног понашања конструкција, да изогеометријска анализа обезбјеђује већу тачност и ефикасност у односу на класичне приступе захваљујући тачном опису геометрије и већем степену континуитета апроксимације, да избор контактне формулације значајно утиче на тачност, стабилност и конвергенцију нумеричког рјешења, те да локално побољшање мреже доприноси повећању тачности рјешавања контактних проблема.

Бројна истраживања показала су да изогеометријска анализа представља значајно унапређење у односу на класични метод коначних елемената, захваљујући тачном опису геометрије, већем степену континуитета апроксимационих функција и повољнијим конвергенцијским карактеристикама. Значајан број радова посвећен је развоју изогеометријских формулација за статичку, динамичку и нелинеарну анализу гредних система, при чему су потврђене предности примјене Б-сплајн и НУРБС функција у односу на класичне приступе. Претходна истраживања су указала и на појаву мембранског и смичућег локинга, што доводи до смањења тачности нумеричких рјешења. Због тога су предложене различите технике за отклањање ових појава, засноване на модификацији апроксимације, колокационим методама и другим нумеричким приступима. Такође је показано да сложенији нелинеарни проблеми захтијевају велики број степени слободе, што значајно повећава прорачунско вријеме и трошкове анализе код класичног метода коначних елемената. У контактним проблемима, посебна пажња посвећена је развоју контактних алгоритама. Истраживања су показала да пеналти метод може довести до осцилација у расподјели контактнoг притиска и осјетљивости на избор пеналти параметра, док Лагранжов метод захтијева увођење додатних непознатих, што повећава комплексност система једначина и прорачунске трошкове. Због тога су предложене различите модификације и комбинације постојећих приступа ради постизања веће тачности, стабилности и ефикасности нумеричког рјешавања контактних проблема.

Литература

[1] T. A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. doi: 10.1007/978-3-662-04864-1.

- [2] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. doi: 10.1007/978-3-540-32609-0.
- [3] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [4] M. A. Crisfield, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Volume 1. John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [5] J. Korelc and P. Wriggers, *Automation of Finite Element Methods*. Cham: Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-39005-5.
- [6] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, no. 39–41, pp. 4135–4195, Oct. 2005, doi: 10.1016/j.cma.2004.10.008.
- [7] E. Reissner, "On One-Dimensional Large-Displacement Finite-Strain Beam Theory," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 52, no. 2, pp. 87–95, Jun. 1973, doi: 10.1002/sapm197352287.
- [8] H. Irschik and J. Gerstmayr, "A continuum mechanics based derivation of Reissner's large-displacement finite-strain beam theory: the case of plane deformations of originally straight Bernoulli–Euler beams," *Acta Mech.*, vol. 206, no. 1–2, pp. 1–21, Jul. 2009, doi: 10.1007/s00707-008-0085-8.
- [9] V. V. Eliseyev, "The non-linear dynamics of elastic rods," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 52, no. 4, pp. 493–498, Jan. 1988, doi: 10.1016/0021-8928(88)90039-1.
- [10] Y. Vetyukov, *Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Structures*. Vienna: Springer Vienna, 2014. doi: 10.1007/978-3-7091-1777-4.
- [11] J. C. Simo, P. Wriggers, and R. L. Taylor, "A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 50, no. 2, pp. 163–180, Aug. 1985, doi: 10.1016/0045-7825(85)90088-X.
- [12] A. K. Belyaev, V. V. Eliseev, H. Irschik, and E. A. Oborin, "Static contact of belt and pulleys with account for shear and gravity," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1048, p. 012002, Jun. 2018, doi: 10.1088/1742-6596/1048/1/012002.
- [13] A. K. Belyaev, V. V. Eliseev, H. Irschik, and E. A. Oborin, "Contact of two equal rigid pulleys with a belt modelled as Cosserat nonlinear elastic rod," *Acta Mech.*, vol. 228, no. 12, pp. 4425–4434, Dec. 2017, doi: 10.1007/s00707-017-1942-0.
- [14] V. Eliseev and Y. Vetyukov, "Effects of deformation in the dynamics of belt drive," *Acta Mech.*, vol. 223, no. 8, pp. 1657–1667, Aug. 2012, doi: 10.1007/s00707-012-0675-3.
- [15] G. Zavarise and P. Wriggers, "A segment-to-segment contact strategy," *Math. Comput. Model.*, vol. 28, no. 4–8, pp. 497–515, Aug. 1998, doi: 10.1016/S0895-7177(98)00138-1.
- [16] H. Xie, Z. Zeng, M. Su, J. Luo, H. Ge, and G. Dai, "Dynamic Contact Stress Determination Method for the Normal Collision Between Rigid Sphere and Elastic Half-Space Interface," *J. Tribol.*, vol. 148, no. 3, Mar. 2026, doi: 10.1115/1.4069954.
- [17] D. Franke, A. Düster, V. Nübel, and E. Rank, "A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem," *Comput. Mech.*, vol. 45, no. 5, pp. 513–522, Apr. 2010, doi: 10.1007/s00466-009-0464-6.
- [18] P. Wriggers and G. Zavarise, "On contact between three-dimensional beams undergoing large deflections," *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 13, no. 6, pp. 429–438, Jun. 1997, doi: 10.1002/(SICI)1099-0887(199706)13:6<429::AID-CNM70>3.0.CO;2-X.
- [19] C. Meier, W. A. Wall, and A. Popp, "A unified approach for beam-to-beam contact," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 315, pp. 972–1010, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.cma.2016.11.028.
- [20] M. Batista, "Large deflections of an elastic rod in contact with a flat wall," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 115–116, pp. 53–60, Jun. 2017, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.02.030.
- [21] Y. Vetyukov, E. Oborin, J. Scheidl, M. Krommer, and C. Schmidrathner, "Flexible belt hanging on two pulleys: Contact problem at non-material kinematic description," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 168, pp. 183–193, Aug. 2019, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.03.034.

- [22] J. Scheidl and Y. Vetyukov, "Steady Motion of a Slack Belt Drive: Dynamics of a Beam in Frictional Contact With Rotating Pulleys," *J. Appl. Mech.*, vol. 87, no. 12, Dec. 2020, doi: 10.1115/1.4048317.
- [23] J. Scheidl and Y. Vetyukov, "Steady Motion of a Belt in Frictional Contact with a Rotating Pulley," 2022, pp. 209–217. doi: 10.1007/978-3-030-79325-8_18.
- [24] L. De Lorenzis, P. Wriggers, and T. J. R. Hughes, "Isogeometric contact: a review," *GAMM-Mitteilungen*, vol. 37, no. 1, pp. 85–123, Jul. 2014, doi: 10.1002/gamm.201410005.
- [25] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and A. Reali, "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 41–44, pp. 4160–4183, Sep. 2007, doi: 10.1016/j.cma.2007.04.007.
- [26] J. Kiendl, F. Auricchio, T. J. R. Hughes, and A. Reali, "Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 284, pp. 988–1004, Feb. 2015, doi: 10.1016/j.cma.2014.11.011.
- [27] J. Kiendl, F. Auricchio, and A. Reali, "A displacement-free formulation for the Timoshenko beam problem and a corresponding isogeometric collocation approach," *Meccanica*, vol. 53, no. 6, pp. 1403–1413, Apr. 2018, doi: 10.1007/s11012-017-0745-7.
- [28] R. Echter and M. Bischoff, "Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 5–8, pp. 374–382, Jan. 2010, doi: 10.1016/j.cma.2009.02.035.
- [29] F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, J. Kiendl, C. Lovadina, and A. Reali, "Locking-free isogeometric collocation methods for spatial Timoshenko rods," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 263, pp. 113–126, Aug. 2013, doi: 10.1016/j.cma.2013.03.009.
- [30] L. Greco, D. Castello, A. Cammarata, and M. Cuomo, "Spherical B-spline interpolation with application to a mixed isogeometric cosserat rod formulation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 446, p. 118239, Nov. 2025, doi: 10.1016/j.cma.2025.118239.
- [31] G. Radenković, *Izogeometrijska teorija nosača*. Univerzitet u Beogradu-ArHITEKTONSKI fakultet, 2014.
- [32] G. Radenković, *Konačne rotacije i deformacije u izogeometrijskoj teoriji nosača*. Univerzitet u Beogradu-ArHITEKTONSKI fakultet, 2017.
- [33] A. Borković, S. Kovačević, G. Radenković, S. Milovanović, and M. Guzijan-Dilber, "Rotation-free isogeometric analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli–Euler beam," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 334, pp. 238–267, Jun. 2018, doi: 10.1016/j.cma.2018.02.002.
- [34] G. Radenković and A. Borković, "Linear static isogeometric analysis of an arbitrarily curved spatial Bernoulli–Euler beam," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 341, pp. 360–396, Nov. 2018, doi: 10.1016/j.cma.2018.07.010.
- [35] J. Kiendl, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and A. Reali, "Isogeometric collocation methods for the Reissner–Mindlin plate problem," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 284, pp. 489–507, Feb. 2015, doi: 10.1016/j.cma.2014.09.011.
- [36] G. Ferri, J. Kiendl, A. Reali, and E. Marino, "A fully explicit isogeometric collocation formulation for the dynamics of geometrically exact beams," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 431, p. 117283, Nov. 2024, doi: 10.1016/j.cma.2024.117283.
- [37] D. Ignesti, G. Ferri, A. Reali, F. Auricchio, J. Kiendl, and E. Marino, "A novel finite-strain mixed isogeometric collocation formulation for hyperelastic geometrically exact beams," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 450, p. 118641, Mar. 2026, doi: 10.1016/j.cma.2025.118641.
- [38] R. Echter, B. Oesterle, and M. Bischoff, "A hierarchic family of isogeometric shell finite elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 254, pp. 170–180, Feb. 2013, doi: 10.1016/j.cma.2012.10.018.
- [39] B. Oesterle, E. Ramm, and M. Bischoff, "A shear deformable, rotation-free isogeometric shell formulation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 307, pp. 235–255, Aug. 2016, doi: 10.1016/j.cma.2016.04.015.

- [40] B. Oesterle, R. Sachse, E. Ramm, and M. Bischoff, "Hierarchic isogeometric large rotation shell elements including linearized transverse shear parametrization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 321, pp. 383–405, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.cma.2017.03.031.
- [41] L. Beirão Da Veiga et al., "A locking-free model for Reissner–Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 25, no. 08, pp. 1519–1551, Jul. 2015, doi: 10.1142/S0218202515500402.
- [42] Z. Zou, T. J. R. Hughes, M. A. Scott, D. Miao, and R. A. Sauer, "Efficient and robust quadratures for isogeometric analysis: Reduced Gauss and Gauss–Greville rules," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 392, p. 114722, Mar. 2022, doi: 10.1016/j.cma.2022.114722.
- [43] O. Weeger, B. Narayanan, L. De Lorenzis, J. Kiendl, and M. L. Dunn, "An isogeometric collocation method for frictionless contact of Cosserat rods," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 321, pp. 361–382, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.cma.2017.04.014.
- [44] M.-J. Choi, S. Klinkel, and R. A. Sauer, "An isogeometric finite element formulation for frictionless contact of Cosserat rods with unconstrained directors," *Comput. Mech.*, vol. 70, no. 6, pp. 1107–1144, Dec. 2022, doi: 10.1007/s00466-022-02223-5.
- [45] C. J. Faccio Júnior, A. Gay Neto, and P. Wriggers, "Spline-based smooth beam-to-beam contact model," *Comput. Mech.*, vol. 72, no. 4, pp. 663–692, Oct. 2023, doi: 10.1007/s00466-023-02283-1.
- [46] P. Antolin, A. Buffa, and M. Fabre, "A priori error for unilateral contact problems with Lagrange multipliers and isogeometric analysis," *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 39, no. 4, pp. 1627–1651, Oct. 2019, doi: 10.1093/imanum/dry041.
- [47] M. J. Grill, W. A. Wall, and C. Meier, "A computational model for molecular interactions between curved slender fibers undergoing large 3D deformations with a focus on electrostatic, van der Waals, and repulsive steric forces," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 121, no. 10, pp. 2285–2330, May 2020, doi: 10.1002/nme.6309.
- [48] A. Borković, M. H. Gfrerer, and R. A. Sauer, "New analytical laws and applications of interaction potentials with a focus on van der Waals attraction," *Appl. Math. Model.*, vol. 145, p. 116100, Sep. 2025, doi: 10.1016/j.apm.2025.116100.
- [49] İ. Temizer, P. Wriggers, and T. J. R. Hughes, "Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, no. 9–12, pp. 1100–1112, Feb. 2011, doi: 10.1016/j.cma.2010.11.020.
- [50] L. De Lorenzis, İ. Temizer, P. Wriggers, and G. Zavarise, "A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 87, no. 13, pp. 1278–1300, Sep. 2011, doi: 10.1002/nme.3159.
- [51] M. E. Matzen and M. Bischoff, "A weighted point-based formulation for isogeometric contact," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 308, pp. 73–95, Aug. 2016, doi: 10.1016/j.cma.2016.04.010.
- [52] T. X. Duong, L. Leonetti, and J. Kiendl, "A variationally consistent contact formulation based on a mixed interpolation point method and isogeometric discretization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 417, p. 116361, Dec. 2023, doi: 10.1016/j.cma.2023.116361.
- [53] J. Lu, "Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, no. 5–8, pp. 726–741, Jan. 2011, doi: 10.1016/j.cma.2010.10.001.
- [54] M. A. Scott, X. Li, T. W. Sederberg, and T. J. R. Hughes, "Local refinement of analysis-suitable T-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 213–216, pp. 206–222, Mar. 2012, doi: 10.1016/j.cma.2011.11.022.
- [55] R. Dimitri, L. De Lorenzis, M. A. Scott, P. Wriggers, R. L. Taylor, and G. Zavarise, "Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 269, pp. 394–414, Feb. 2014, doi: 10.1016/j.cma.2013.11.002.

[56] C. Zimmermann and R. A. Sauer, "Adaptive local surface refinement based on LR NURBS and its application to contact," *Comput. Mech.*, vol. 60, no. 6, pp. 1011–1031, Dec. 2017, doi: 10.1007/s00466-017-1455-7.

[57] S. Kumar Das and S. Singh Gautam, "A robust and efficient adaptive NURBS contact enrichment technique," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 446, p. 118313, Nov. 2025, doi: 10.1016/j.cma.2025.118313.

[58] T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli, "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 5–8, pp. 301–313, Jan. 2010, doi: 10.1016/j.cma.2008.12.004.

Практични допринос дисертације огледа се у развоју нумеричких модела и програмских кодова који омогућавају тачно, ефикасно и робусно рјешавање сложених проблема, уз могућност примјене на реалне инжењерске проблеме у грађевинској, машинској, аутомобилској и авио-индустрији. Развијени модели омогућавају прецизније предвиђање понашања конструкција у сложеним условима деформисања, што доприноси повећању поузданости и сигурности приликом пројектовања. Они представљају добру основу за даљи развој нумеричких процедура и њихову примјену у пракси, омогућавајући инжењерима и истраживачима лакши избор метода прикладних за посматрани проблем, као и бољи увид у њихове могућности и ограничења. Научни допринос дисертације огледа се у унапређењу формулација за нелинеарну анализу гредних система, са посебним нагласком на контактне проблеме. Развој ефикаснијих нумеричких процедура које су ослобођене појаве локинга омогућио је ефикасније рјешавање сложених проблема уз задржавање високе тачности. Примјена изогеометријске анализе омогућила је висок степен контроле над дискретизацијом и континуитетом на границама елемената, што значајно утиче на тачност нумеричких рјешења. Значајан допринос представља систематска анализа утицаја избора базних функција, континуитета на границама елемената и распореда елемената на конвергенцију, стабилност и тачност рјешења, као и поређење различитих гредних модела и контактних формулација. Развијени програмски кодови омогућавају имплементацију, верификацију и даљи развој предложених модела, као и боље разумијевање понашања гредних система у условима великих помјерања и контактних интеракција, чиме је дат значајан допринос унапређењу нумеричких метода и теоријских приступа у области механике и теорије конструкција.

1. Укратко описати разлоге због којих су истраживања предузета и представити проблем, предмет, циљеве и хипотезе³.
2. На основу прегледа литературе, сажето приказати резултате претходних истраживања у вези проблема који је истраживан (водити рачуна о томе да обухвата најновија и најзначајнија сазнања из те области код нас и у свијету).
3. Навести допринос тезе у рјешавању изучаваног предмета истраживања.
4. Навести очекивани научни и практични односно умјетнички допринос дисертације.

5. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

Материјал за израду докторске дисертације обухватио је релевантну научну и стручну литературу из области нелинеарне анализе конструкција, механике гредних система, контактне механике и изогеометријске анализе. Посебна пажња посвећена је радовима који се односе на Тимошенкову теорију греда, формулације са смичућом деформабилношћу и савремене приступе моделирању контактних интеракција. Поред литературе, у истраживању су кориштени нумерички модели и репрезентативни примјери за верификацију и анализу разматраних формулација. Развој и имплементација нумеричких процедура реализовани су у програмском пакету *Wolfram*

³ Хипотезе приказати само за научни докторат.

Mathematica. У истраживању су примјењене опште и посебне методе научноистраживачког рада, као што су метода анализе, метода апстракције, конкретизације и генерализације, као и метод синтезе. Ограничења примијењених модела и усвојених претпоставки јасно су дефинисана и критички размотрена. За рјешавање постављених проблема кориштене су нумеричке процедуре засноване на методу коначних елемената, формулисане у оквиру изогеометријске анализе. Примијењене методе су адекватне и савремене и у складу са актуелним приступима у области. Истраживање је спроведено у складу са првобитно дефинисаним планом, без измјена које би утицале на постављене циљеве и предмет истраживања. Обим спроведених нумеричких анализа је довољан за доношење поузданих закључака о тачности, поузданости и прорачунској ефикасности разматраних формулација.

1. Описати и дати основне карактеристике материјала који је обрађиван, критеријуме који су узети у обзир за избор материјала.
2. Дати кратак увид у примијењени метод истраживања, при чему је важно оцијенити сљедеће:
 - 2.1. Да ли су примјењене методе истраживања адекватне, довољно тачне и савремене, имајући у виду достигнућа на том пољу у свјетском оквиру;
 - 2.2. Образложити евентуалне измјене првобитног плана истраживања;
 - 2.3. Да ли је обим истраживања довољан за доношење поузданих закључака или је потребно проширити постојеће или увести нове методе;
 - 2.4. Да ли је статистичка обрада података адекватна, ако је коришћена при обради резултата.

6. РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ/УМЈЕТНИЧКИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

У оквиру докторске дисертације анализиране су изогеометријске гредне формулације за нелинеарну статичку анализу и анализу механичког контакта раванских греда. Показано је да локално побољшање мреже представља ефикасан поступак у случајевима губитка регуларности рјешења, јер омогућава повећање тачности без значајног повећања броја степени слободе. Утврђено је да примјена базних функција вишег степена побољшава тачност нумеричких рјешења, док виши континуитет на границама елемената обезбјеђује тачност уз знатно мањи број степени слободе. Такође је показано да Модел са независном апроксимацијом смицања и Инкрементални модел обезбјеђују високу тачност уз већу прорачунску ефикасност у односу на класични Тимошенков модел, при чему не испољавају појаву смичућег локинга. Код контактних проблема утврђено је да избор контактне формулације има значајан утицај на расподелу контактних притисака. Показано је да се осцилације контактних притисака, које се јављају при већим вриједностима пеналти параметра, могу значајно ублажити примјеном базних функција вишег степена и локалним побољшањем мреже.

Комисија оцјењује да су добијени резултати јасно и логично приказани, правилно интерпретирани и критички анализирани. Њихова верификација извршена је поређењем са аналитичким, полуаналитичким и референтним нумеричким рјешењима, као и са резултатима доступним у научној литератури. Нова сазнања односе се на систематично испитивање утицаја различитих изогеометријских гредних формулација, контактних алгоритама и локалног побољшања мреже на тачност и прорачунску ефикасност рјешавања нелинеарних статичких и контактних проблема. Добијени резултати представљају значајан научни и практични допринос области изогеометријске анализе и механичког контакта, а истовремено представљају добру основу за даља истраживања контактних проблема са трењем, контакта деформабилних тијела и развоја адаптивних поступака локалног побољшања мреже.

1. Укратко навести резултате до којих је студент дошао.
2. Оцијенити да ли су добијени резултати јасно приказани, правилно, логично и јасно тумачени, упоређујући их са резултатима других аутора и да ли је студент при томе испољавао довољно критичности.

3. Посебно је важно истаћи до којих нових сазнања се дошло у истраживању, који је њихов теоријски и практични допринос, те да ли указују на нове правце истраживања.

7. ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

Примјеном изогеометријског приступа потврђено је да модели који укључују утицај смичуће деформабилности обезбјеђују прецизнији опис механичког понашања гредних система, нарочито код контактних проблема. Показано је да Модел са независном апроксимацијом смицања и Инкрементални модел задржавају високу тачност уз већу прорачунску ефикасност у односу на класични Тимошенков модел, као и да не испољавају појаву смичућег локинга. Утврђено је да степен и континуитет базних функција, као и локално побољшање мреже, имају значајан утицај на тачност, конвергенцију и прорачунску ефикасност нумеричких рјешења. Комисија констатује да су постављени циљеви истраживања у потпуности остварени, да су добијени резултати научно утемељени, јасно приказани и критички анализирани, те да представљају значајан научни и практични допринос у области изогеометријске анализе, нелинеарне анализе гредних система и механичког контакта. Добијени резултати представљају добру основу за даља истраживања, посебно у области контактних проблема са трењем, контакта између деформабилних тијела и развоја адаптивних поступака локалног побољшања мреже. Комисија са задовољством предлаже Научно-наставном вијећу Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци да прихвати докторску дисертацију кандидата и одобри њену јавну одбрану.

1. Навести најзначајније чињенице које указују на научни/уметнички допринос дисертације.
2. На основу укупне оцјене дисертације, комисија предлаже:
 - да се дисертација / умјетнички рад прихвати, а студенту одобри одбрана,
 - да се дисертација / умјетнички рад враћа студенту на дораду (да се допуни или измијени) или
 - да се дисертација / умјетнички рад одбија.

Мјесто и датум: Бања Лука и Београд, 17. септембар 2026.

др Валентина Голубовић-Бугарски, редовни
професор; с.р.

Предсједник комисије

др Мирослав Марјановић, ванредни професор;
с.р.

Члан

др Наташа Мрђа Бошњак, доцент; с.р.

Члан

Име и презиме, титула и звање

Члан

Име и презиме, титула и звање

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије дужан је да у извјештај унесе образложење, то јест разлоге због којих не жели да потпише извјештај.

У прилогу извјештаја доставити:

1. Одлуку Умјетничко-научно-наставног / научно-наставног вијећа чланице Универзитета о именовању комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану;
2. Одлуку Умјетничко-научно-наставног / научно-наставног вијећа чланице Универзитета о прихватању извјештаја комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану;
3. Извјештај комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану – Образац 3;
4. Докторска дисертација у ПДФ формату;
5. Увјерење продекана за научноистраживачки рад и развој о провјери оригиналности докторске дисертације путем званичног софтвера за откривање плагијаризма;
6. Изјава о ауторству;
7. Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци да докторску дисертацију / докторски умјетнички рад учини јавно доступним;
8. Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације / докторског умјетничког рада.